韦东奕的妙解

冷岗松

一提起韦东奕, 我回忆的闸门就会兴奋地打开, 一组组镜头便呈现在眼前.

A

2008 年 3 月, 苏州, 国家集训队第二次小考, 李伟固教授出了一道代数难题:

题 1. 设 z_1, z_2, z_3 是 3 个模不大于 1 的复数, w_1, w_2 是方程

$$(z-z_1)(z-z_2)+(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_3)(z-z_1)=0$$

的两个根. 证明: 对 $j=1,2,3$, 都有

$$\min\{|z_j-w_1|,|z_j-w_2|\}\le 1.$$

下午阅卷时, 李非常兴奋地告诉我, 做出了这个难题的三位学生是张瑞祥、牟晓生和韦东奕. 前面两位分别是来自北京和上海的高手, 早已名声在外. 来自山东的高一学生韦东奕完全不在我们的视野中. 发现"黑马"了, 教练们都很高兴. 特别是韦的解答用纯代数方法完成 (李提供的解答 [1] 和张、牟的方法都用到了几何方法), 反映出很强的分析硬功夫. 李教授赞叹不已, 并以"山东神人"称呼韦. 这是韦初出茅庐的第一刀!

B

还是在 2008 年国家集训队集训期间, 第五次小考, 我把德国数学家 Alzer 得到的凸序列上的反向 Cauchy 不等式作为第三题. 该题叙述如下:

题 2. 设 $0<x_1\le\frac{x_2}{2}\le\cdots\le\frac{x_n}{n}$, $0<y_n\le y_{n-1}\le\cdots\le y_1$. 证明

$$\left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)\left(\sum_{k=1}^n(x_k^2-\frac{1}{4}x_kx_{k-1})y_k\right),$$

其中 $x_0=0$.

考完收卷后, 我问韦这个不等式难吗? "很简单", 他作了一个令我惊讶的

回答. 最后, 这个题大概有 7-8 人做出来. 还是一个难题, 在我们预估的范围里. 但韦给出两种解法, 均比标准答案简单. 由此可见, 韦认为这题简单确实是实话. 山东神人在代数(严格讲应是分析)上的功夫再次使人折服.

C

2008 年 6 月, 上海, 国家队培训, 我从美国数学月刊 (AMM) 上找来了如下问题作为训练题:

题 3. 设 F 是一个由整数组成的有限集, 满足

(i) 对任意 $x \in F$, 存在 $y, z \in F$ 使得 $x = y + z$;

(ii) 存在 n, 使得对任何正整数 $k(1 \leq k \leq n)$ 及 F 中的任意 k 个 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 都有 $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \neq 0$.

证明: $|F| \geq 2n + 2$.

大多数同学都提供的是图论证法. 唯独韦提供了一个非常直白的方法, 仅用了一下极端分析, 自然而优雅. 直到现在, 我还经常向竞赛刚入门的学生讲解这个方法, 并常戏称这是“韦方法”.

D

2009 年 3 月, 武汉, 国家集训队的第一次小考. 这次小考的三个题的综合难度很高, 余红兵教授和付云皓 (曾两次获得 IMO 满分金牌) 都预估可能没有人完全做对三个题. 收卷时, 脸上略带兴奋表情的韦走过来对我说:“今天的题有点意思.”我问他做完三题花了多少时间, 他说花了一个半小时. 果然, 这次小考韦得到满分. 后来的几场考试, 韦更是神勇 (监考老师告诉我, 韦每次做题时间不超过一小时), 均是满分. 韦严谨清晰的表达, 使我们实在找不到扣掉他一分的理由. 于是, 中国奥林匹克的历史上, 产生了第一个在国家集训队的所有考试中均获得满分的选手. 这是韦创造的记录, 而且这个记录至今没有被打破.

韦的传奇还包括两次 IMO 满分金牌 (第 49 届和第 50 届), 2013 年获丘成桐大学生数学竞赛个人全能奖 (金奖), 并获得五个单项奖中的四个金奖, 一个银奖.

E

2009 年 6 月, 武汉, 国家队培训. 我第一天拿了四个题, 其中一道题很有趣且难度颇大, 它是匈牙利 2000 年 Minklòs Schweitzer 比赛 (大学生数学竞赛) 的一

个问题, 可叙述为:

题 4. 设 $a_1 < a_2 < a_3$ 是正整数. 证明: 存在不全为 0 的整数 x_1, x_2, x_3 使得

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

且 $\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \le \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3}$.

韦因回校参加毕业会考, 第二天早上才风尘仆仆赶到武汉. 他花了一个小时做好了第二天的题, 然后花了一个多小时完成第一天的题. 对于上述难题, 他提出了一个简单的证法 (见 **G**), 但其中二元点集 A 的构造有点“旱地拔葱”(李伟固原创的语言) 的感觉, 令人折服!

F

2009 年 7 月, 北京, 国家队出国前休整. 一天, 我拿到了当年保加利亚国家队选拔考试试题 (没有解答), 其中有一道不等式是这样的:

题 5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n,\ b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是正实数. 证明:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{c_i+c_j}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{b_ib_j}{c_i+c_j}\right) \ge \left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c_i+c_j}\right)^2. \tag{1}$$

我问韦这道题的做法. 韦思考了几分钟后说:“只须说明左边的项均是非负的便可.”我期待着他的进一步解释, 然而他便无语了. 我一脸茫然, 但也不便再问, 苦苦思考了一个下午, 我最终证明了它, 明白了韦的话道出了本质. 事实上, 只要证明了下面结论: 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是正实数, 则

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{c_i+c_j} \ge 0. \tag{2}$$

那么在 (2) 中令 $x_i = a_ix + b_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 便得

$$Ax^2 + 2Cx + B \ge 0; \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

其中

$$A = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{c_i+c_j},\ \ B = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{b_ib_j}{c_i+c_j},\ \ C = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c_i+c_j}.$$

再由 (3) 的判别式 $\triangle \le 0$ 便得 (1) .

这说明 (2) 式左边的非负性的判定是问题的关键, 韦的话正确. 当然这个二次型的非负性判定并不是新的, 本质上等同于早年波兰 (1992) 的一道竞赛试题:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$. 证明:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

对于上述问题, 尽管韦只花了几分钟, 我却花了几个小时. 但我心里仍然充满了快乐. 我想: 面对一般的问题, 天才和凡人或许只有时间的差别, 勤能补拙!

G

在这一节, 我们介绍 **C** 中题 3 和 **E** 中题 4 的韦的解法. 至于 **A** 中题 1 和 **B** 中题 2 韦的解法, 我的记忆很模糊了 (当时没有记录), 且试卷被封存而无法查找. 本文只能暂缺.

C **中题** 3 **的解**:

由条件 (ii) 知 $0 \notin F$.

若 F 中的数全为正数, 设其中最小的为 x_0. 由条件 (i) 知存在 $y, z \in F$ 使得 $x_0 = y + z, y, z$ 是正数. 因此 $x_0 > y$, 与 x_0 的最小性矛盾. 这说明 F 中的数不全为正数. 同理 F 中的数不能全为负数.

记 $F^+ = F \cap \mathbf{R}^+, F^- = F \cap \mathbf{R}^-$, 则 F^+, F^- 非空.

现任取一个正数 $a_1 \in F^+$, 则由 (i) 知存在 $a_2 \in F^+$ 使得 $a_1 = a_2 + z_1$, 其中 $z_1 \in F$. 再由 (i) 知存在 $a_3 \in F^+$ 使得 $a_2 = a_3 + z_2$, 其中 $z_2 \in F$. 如此下去, 我们可构造出 F^+ 的一个无穷序列 $\{a_n\}$ 使得

$$a_n = a_{n+1} + z_n, \tag{4}$$

其中 $\{z_n\}$ 是 F 的序列.

注意到 F^+ 是有限集, 因此由抽屉原理知存在 $j > i$ 使得

$$a_i = a_j. \tag{5}$$

现选择使得 (5) 成立的“跨度” $j - i$ 最小的数对 (i, j), 则这时 $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{j-1}$ 是两两不同的 F^+ 中的实数. 又 (5) 可重写为

$$(a_i - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_{i+2}) + \cdots + (a_{j-1} - a_j) = 0,$$

故由 (4) 便知

$$z_i + z_{i+1} + \cdots + z_{j-1} = 0.$$

再由 (ii) 知 $z_i, z_{i+1}, \cdots, z_{j-1}$ 的个数必须大于等于 $n+1$, 亦即 $j - i \geq n + 1$. 这亦说明 $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{j-1}$ 是 F^+ 的两两不相同的元且个数大于等于 $n+1$. 因此

$|F^+| \geq n+1$.

同理 $|F^-| \geq n+1$.

故 $|F| = |F^+| + |F^-| \geq 2n+2$. 证毕. $\square$

E 中题 4 的解:

设 $k = [\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3}]$, 则 $k \in N^*$ 且 $k+1 > \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3}$. 记

$$A = \left\{(i,j) \mid i,j \in \mathbf{Z}, 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k, \left[\frac{k}{2}\right] \leq i+j \leq \left[\frac{3}{2}k\right]\right\},$$

则

$$\begin{aligned}|A| &= (k+1)^2 - \binom{[\frac{k}{2}]+1}{2} - \binom{k-[\frac{k}{2}]}{2} \\ &= (k+1)^2 - \frac{[\frac{k}{2}]^2 + [\frac{k}{2}] + (k-[\frac{k}{2}])^2 + (k-[\frac{k}{2}])}{2} \\ &= (k+1)^2 - \frac{(k-2[\frac{k}{2}])^2 + k^2 + 2k}{4} \\ &\geq (k+1)^2 - \frac{1+k^2+2k}{4} \\ &= \frac{3}{4}(k+1)^2 \\ &> \frac{3}{4}(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3})^2 = a_3.\end{aligned}$$

上面的第一个不等号成立时因为 $(k-2[\frac{k}{2}])^2 \leq 1$ (由于 $k-2[\frac{k}{2}] = 0$ 或 1).

已知形如 $ia_1 + ja_2$ $\big((i,j) \in A\big)$ 的数共有 $|A|$ 个, 故必有两个除以 a_3 的余数相同. 不妨设

$$i_1a_1 + j_1a_2 \equiv i_2a_1 + j_2a_2 \pmod{a_3}, \tag{1}$$

其中 $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in A, (i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)$.

再由 (1) 设

$$(i_1a_1 + j_1a_2) - (i_2a_1 + j_2a_2) = na_3, \tag{2}$$

其中 $n \in \mathbf{Z}$.

再注意到 $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in A,\ 0 < a_1 < a_2 < a_3$.

若 $i_1 \leq i_2$, 则

$$\begin{aligned}na_3 &= (i_1a_1 + j_1a_2) - (i_2a_1 + j_2a_2) \\ &= (i_1 - i_2)a_1 + (j_1 - j_2)a_2 \\ &\leq (j_1 - j_2)a_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le (k-0)a_2 \\
&= ka_2 < ka_3,
\end{aligned}
$$

因此可得 $n<k$.

若 $i_1 \ge i_2$, 则

$$
\begin{aligned}
na_3 &= (i_1a_1 + j_1a_2) - (i_2a_1 + j_2a_2) \\
&= (i_1+j_1)a_2 - i_1(a_2-a_1) - (i_2+j_2)a_2 + i_2(a_2-a_1) \\
&= \big((i_1+j_1)-(i_2+j_2)\big)a_2 - (i_1-i_2)(a_2-a_1) \\
&\le \left(\left[\frac{3}{2}k\right] - \left[\frac{k}{2}\right]\right)a_2 - 0 \\
&= ka_2 < ka_3,
\end{aligned}
$$

从而可得 $n<k$.

综上说明不论何种情况总有 $n<k$.

同理可证 $n>-k$.

故
$$|n|<k. \tag{3}$$

又注意到 $(i_1,j_1),(i_2,j_2)\in A$ 且不同及 $i_1,j_1,i_2,j_2\in\{0,1,\cdots,k\}$. 所以

$$|i_1-i_2|\le k, |j_1-j_2|\le k,\ i_1-i_2, j_1-j_2\in \mathbf{Z} \text{ 且不都为 } 0. \tag{4}$$

这样取 $x_1=i_1-i_2, x_2=j_1-j_2, x_3=-n$, 由 (2) 便得

$$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=0.$$

由 (3), (4) 知这样的 x_1,x_2,x_3 不全为 0, 且其绝对值均小于等于 k, 从而小于等于 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3}$. 证毕. □

参考文献

[1] 中国数学奥林匹克国家集训队教练组, 走向IMO • 数学奥林匹克试题集锦 (2008)[M], 华东师范大学出版社, 2008.